

涡轮叶栅端壁二次流动与换热的 V2F 模拟

田兴江¹, 常海萍¹, 张镜洋², 成锋娜¹

(1. 南京航空航天大学 能源与动力学院
江苏省航空动力系统重点实验室, 南京 210016;
2. 南京航空航天大学 航天学院, 南京 210016)

摘 要: 针对低展弦比涡轮叶栅端壁区亚声速流动及换热, 采用基于线性涡黏假设的 V2F 模型开展了数值模拟. 结果表明: 涡轮叶栅流动中存在马蹄涡、通道涡、压力侧角涡、吸力侧角涡等多种复杂涡系结构, 其中马蹄涡与通道涡是涡轮叶栅二次损失的主要来源. 端壁换热与马蹄涡及通道涡强度及位置直接相关, 并呈现明显的分区特征. 端壁极限流线结果显示, V2F 模型模拟的端壁单马蹄涡分离线与实验结果吻合, 优于 SST (shear stress transport) $k-\omega$ 模型模拟的端壁双马蹄涡分离线. V2F 模型引入了新的湍流尺度, 在马蹄涡及通道涡位置、端壁静压损失系数分布、叶栅出口总压损失分布及端壁 Stanton 数分布等方面均与实验结果吻合较好, 对叶栅气动损失及端壁换热有良好的预测能力.

关 键 词: 涡轮叶栅端壁; 二次流; 端壁换热; V2F 模型; 总压损失系数; 涡系结构

中图分类号: V231.1

文献标志码: A

V2F simulation on secondary flow and heat transfer of turbine cascade endwall

TIAN Xing-jiang¹, CHANG Hai-ping¹,
ZHANG Jing-yang², CHENG Feng-na¹

(1. Jiangsu Province Key Laboratory of Aerospace Power System,
College of Energy and Power Engineering,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;
2. College of Astronautics,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Numerical simulation using V2F model based on a linear eddy viscosity assumption, was carried out on subsonic flow and heat transfer of turbine cascade endwall with low aspect ratio airfoil. The results show that complex vortex structures in turbine cascade are mainly composed of horseshoe vortex, passage vortex, pressure side corner vortex and suction side corner vortex. The horseshoe vortex and passage vortex are main sources of secondary loss, and their intensity and location have direct effect on heat transfer of endwall, showing obvious partition property; prediction on endwall limiting streamlines shows that single horseshoe vortex separation line with V2F model is consistent with the experiment data, and superior to double horseshoe vortex separation line predicted by SST (shear stress transport) $k-\omega$ model. With introduction of a new turbulent scale, which coincides well with experiment data on endwall static pressure loss coefficient distribution, locations of horse-

收稿日期: 2015-04-28

基金项目: 国家自然科学基金(51406085); 江苏省研究生培养创新工程(KYLX_0301)

作者简介: 田兴江(1986—), 男, 贵州大方人, 博士生, 主要从事航空发动机高温部件热防护研究.

shoe vortex and passage vortex and total pressure loss coefficient distribution of cascade outlet and endwall Stanton number distribution, V2F model could predict better on both cascade aerodynamic loss and endwall heat transfer than SST $k-\omega$ model.

Key words: turbine cascade endwall; secondary flow; endwall heat transfer; V2F model; total pressure loss coefficient; vortex structure

涡轮叶栅通道内存在强烈的二次流动,导致涡轮气动损失增加.对低展弦比涡轮叶片而言,二次流导致的气动损失更高.Langston 等^[1-2]通过涡轮叶栅亚声速流动实验,提出了一种涡轮叶栅端壁边界层分离的三维模型(图 1).Sieverding, Wang 等^[3-4]对端壁二次流做了详尽的实验研究,并提出了各自的端壁二次流模型,深化了人们对端壁区二次流结构的认识.端壁复杂的二次流、马蹄涡、通道涡等结构使得涡轮叶栅通道流动具有复杂的三维性,对端壁流动与换热有很大影响.

国内外学者在预测端壁流动与换热方面开展了大量数值模拟研究^[5-10],其中湍流模型以两方程 $k-\epsilon$ 及 $k-\omega$ 模型应用最为广泛.Hermanson 等^[11]的研究发现 reliable $k-\epsilon$ 两层模型对端壁流动结构有较好的预测,但对端壁换热则预测过高.Becz 和 Holley 等^[12-17]对低展弦比 JT9D-34 涡轮叶片进行了详细的气动测量,同时采用 SST $k-\omega$ 模型开展了数值模拟.其研究表明,SST $k-\omega$ 模型在模拟涡轮叶栅气动损失、端壁压力分布及换热分布等方面均与实验存在较大差异.

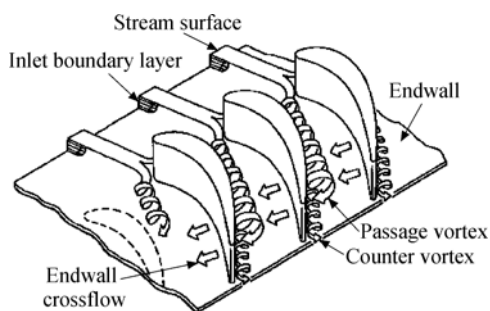


图 1 Langston 提出的二次流模型^[1-2]

Fig. 1 Secondary flow model of Langston^[1-2]

基于 Durbin^[18]的 $k-\epsilon-v^2$ 模型发展而来的 V2F 湍流模型,考虑了近壁湍流各向异性及非局部压力-应变效应,更适用于计算流体经过曲面的分离等复杂流动.Parneix, Lien 等^[19-20]对 Durbin 的 $k-\epsilon-v^2$ 模型^[18]做了改进,其中 Lien 等^[20]的修正模型应用最为广泛.近年来,V2F 湍流模型在涡轮叶栅流动与换热研究中逐渐得到应用^[11],但对端壁二次流动与换热模拟适用性的讨论还较

少.本文针对 Becz 和 Holley 等^[12-17]研究中放大 10 倍的 JT9D-34 涡轮叶片,采用 V2F 模型对涡轮叶栅中二次流动与换热进行数值模拟,研究端壁区二次流动结构,讨论前缘马蹄涡、通道涡等二次涡系的发展及对端壁换热的影响,验证 V2F 模型对涡轮叶栅气动损失及端壁换热预测的适用性.

1 数值模型

1.1 研究对象及网格划分

叶型主要几何参数^[14]见表 1.平面叶栅模型见图 2.进口段及出口段长度均为一个轴向弦长 C_{ax} ,考虑对称性及周期性,叶片展向取 $1/2$ 叶高 ($1/2 H$),栅距方向取一个栅距 S .

表 1 叶型几何参数

Table 1 Geometry parameter of airfoil

参数	数值
轴向弦长 C_{ax}/mm	281.4
弦长/轴向弦长	1.2242
栅距/轴向弦长 (S/C_{ax})	0.9555
展弦比(叶高/轴向弦长, H/C_{ax})	0.9888

采用 ANSYS ICEM CFD 软件对计算域生成 HOH 结构化网格,其中端壁及叶片型面附近网格进行局部加密(近壁首层网格 $y^+ \approx 1$).网格节点数最终为 165 万,经验证具有独立性解(图 3).

1.2 边界条件

计算域上表面为对称边界,叶片表面为绝热边界,叶栅进口给定沿叶高速度分布,主流速度为 33.5 m/s ^[12],基于轴向弦长 C_{ax} 的进口雷诺数为 6.3×10^5 ,边界层厚度为 27.9 mm ,边界层内速度按 $1/7$ 次方分布,来流速度方向与轴向夹角为 45.3° ,来流湍流度为 5% .叶栅出口压力为 101.325 kPa .端壁采用绝热壁面条件进行气动计算,后按恒热流密度为 3000 W/m^2 计算端壁换热.

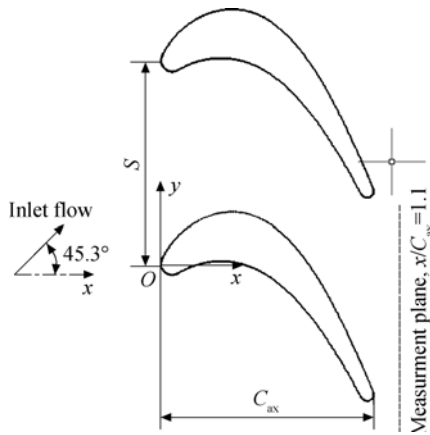


图 2 平面叶栅模型

Fig. 2 Linear cascade model

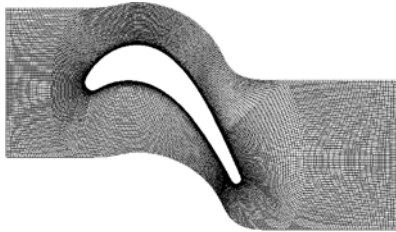


图 3 计算网格

Fig. 3 Computational grid

1.3 湍流模型与计算方法

失速角的正确预测是模拟流体经过曲面的分离流动的基础, 涡黏模型并不能很好地满足该要求, reliable k - ϵ 两层模型和 SST k - ω 模型对端壁二次流动及换热与实验相比存在较大差异^[11-17]. 涡黏模型如 k - ϵ 模型过于估计湍流动能, 且对流线曲率及湍流各向异性相互影响极不敏感; 与涡黏模型相比, 雷诺应力模型能预测更多的湍流特征, 但这些湍流特征过于复杂且存在数值不稳定性. V2F 湍流模型通过引入 $\overline{v^2}$ (可认为是垂直于流线的速度脉动) 来替代湍动能 k 计算涡黏度 μ_t . V2F 模型在标准 k - ϵ 方程基础上增加两个方程^[20], 具体如下(各方程中均忽略源项):

$$\partial_t k = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [(\mu + \mu_t) \nabla k] - \mathbf{u} \cdot \nabla k + P_k - \epsilon \quad (1)$$

$$\partial_t \epsilon = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] - \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon + \frac{C'_{\epsilon 1} P_k - C_{\epsilon 2} \epsilon}{T} \quad (2)$$

$$\partial_t \overline{v^2} + \mathbf{u} \cdot \nabla \overline{v^2} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [(\mu + \mu_t) \nabla \overline{v^2}] + kf - 6 \overline{v^2} \frac{\epsilon}{k} \quad (3)$$

$$f - L^2 \nabla^2 f = (C_1 - 1) \frac{\frac{2}{3} - \frac{\overline{v^2}}{k}}{T} + C_2 \frac{P_k}{k} + \frac{5 \overline{v^2}}{kT} \quad (4)$$

其中 ρ 为流体密度, ϵ 为湍动能耗散率, P_k 为湍动能生成量, μ 为动力黏度, μ_t 为涡黏度, 定义为 $\mu_t = \rho C_\mu \overline{v^2} T$. σ_k 和 σ_ϵ 分别为 k 方程和 ϵ 方程中的湍流普朗特数, $\overline{v^2}$ 为速度变化尺度, f 为椭圆松弛函数, T 和 L 分别为湍流时间尺度和长度尺度, 由下式定义:

$$T = \min \left[T', \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \cdot \frac{k}{\overline{v^2} C_\mu \sqrt{2 S^2}} \right] \quad (5)$$

$$T' = \max \left[\frac{k}{\epsilon}, 6 \sqrt{\frac{\nu}{\epsilon}} \right] \quad (6)$$

$$L = C_L \max \left[L', C_\eta \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \right] \quad (7)$$

$$L' = \min \left[\frac{k^{3/2}}{\epsilon}, \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{k^{3/2}}{\overline{v^2} C_\mu \sqrt{2 S^2}} \right] \quad (8)$$

其中 ν 为运动黏度. V2F 模型常数为 $\alpha = 0.6$, $C_1 = 1.4$, $C_2 = 0.3$, $C_{\epsilon 1} = 1.4$, $C_{\epsilon 2} = 1.9$, $C_\eta = 70$, $C_\mu = 0.22$, $C_L = 0.23$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\epsilon = 1.3$, $C'_{\epsilon 1} = C_{\epsilon 1} (1 + 0.045 \sqrt{k/\overline{v^2}})$. 计算时采用稳态分离隐式求解器, 压力修正采用 SIMPLE (semi-implicit method for pressure linked equations) 算法, 各参数离散采用 2 阶迎风格式, 解收敛的判别标准为能量方程残差小于 10^{-7} , 其余参数残差小于 10^{-4} , 出口总压损失系数变化小于 10^{-3} .

2 数值计算结果与分析

2.1 参数定义

定义总压损失系数

$$C_{pt} = \frac{p_1^* - p^*}{\frac{1}{2} \rho_1 u_1^2} \quad (9)$$

其中 p_1^* 为进口总压, p^* 为当地总压, ρ_1 为进口空气密度, u_1 为进口主流速度(边界层外).

定义静压损失系数

$$C_p = \frac{p_1 - p}{\frac{1}{2} \rho_1 u_1^2} \quad (10)$$

其中 p_1 为进口静压, p 为当地静压.

定义表面传热系数

$$h = q / (T_w - T_1) \quad (11)$$

其中 q 为壁面热流密度, T_w 和 T_1 分别为壁面和来流温度.

定义斯坦顿(Stanton)数

$$St = \frac{h}{\rho c_p u_1} \quad (12)$$

其中 c_p 为流体比定压热容。

2.2 涡轮叶栅气动损失

图4首先给出了50%叶高处叶片表面静压损失系数(C_p)分布。图中横坐标表示轴向位置,纵坐标为静压损失系数。计算结果显示,V2F模型、realizable $k-\epsilon$ 模型及SST $k-\omega$ 模型计算结果与实验数据均较为吻合,其中SST $k-\omega$ 模型计算的静压损失系数比其他两种湍流模型的计算结果略高。在叶片吸力侧,当 $x/C_{ax} = 0.46$ 时静压损失系数最低,速度加速到最大值。

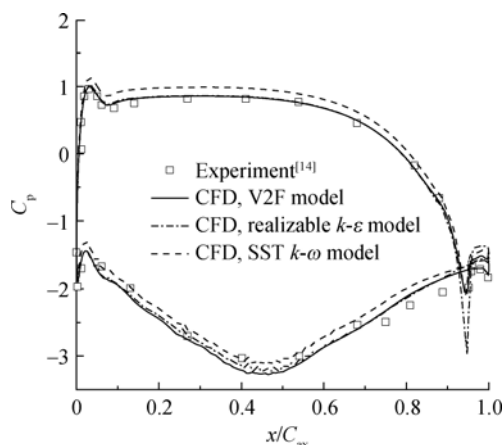


图4 50%叶高处叶片表面静压损失系数分布

Fig. 4 Surface static pressure loss coefficient of airfoil distribution on the midspan

图5所示为涡轮叶栅质量平均总压损失系数(C_{pt}'')沿轴向发展趋势的V2F模型数值模拟与实验结果对比。质量平均总压损失系数沿轴向逐渐

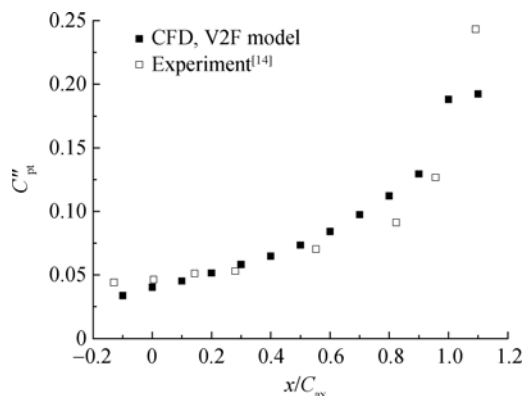


图5 涡轮叶栅质量平均总压损失发展趋势

Fig. 5 Development of mass-averaged total pressure loss coefficient through cascade

增大,当 $x/C_{ax} < 0.8$ 时, C_{pt}' 沿流向增长较慢,而后迅速增大,到达测量截面 $x/C_{ax} = 1.1$ 处总压损失系数达到 0.199 (绝对值),比实验值^[14] 0.246 低 19%。

图6为叶栅出口(位于 $x/C_{ax} = 1.1$ 处,下同)总压损失系数 C_{pt} 分布的数值模拟与实验结果对比。其中图6(a)为实验结果^[14],图6(b)~图6(d)分别为V2F模型、realizable $k-\epsilon$ 模型及SST $k-\omega$ 模型计算结果。可以看出,V2F模型模拟总压

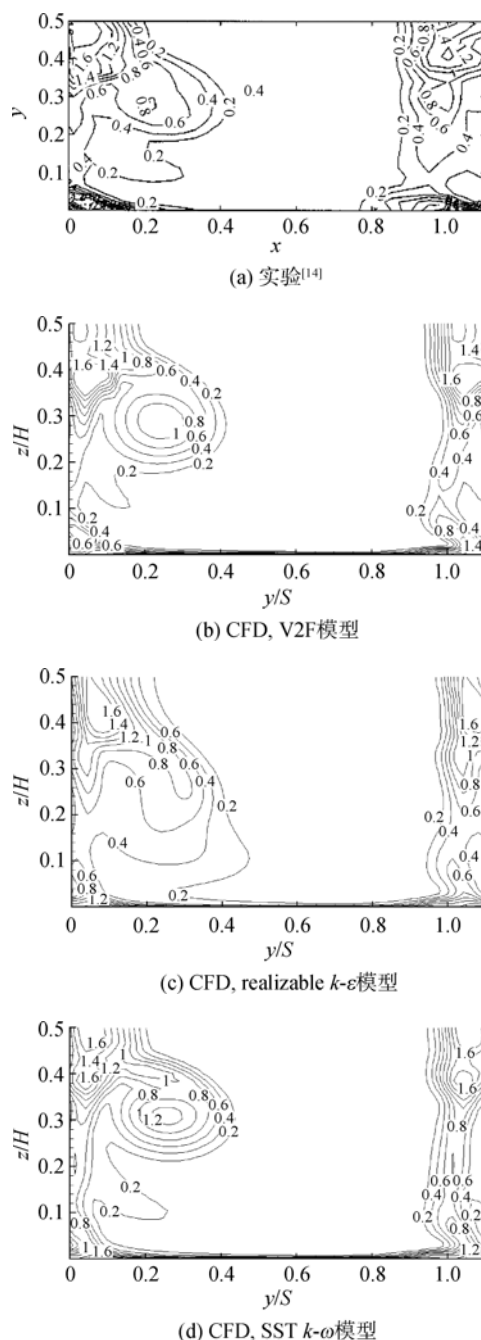


图6 叶栅出口总压损失系数分布

Fig. 6 Total pressure loss coefficient distribution at cascade outlet

损失系数分布与实验结果吻合, SST $k-\omega$ 模型分布与实验结果相似, 但整体水平略高于实验结果, realizable $k-\epsilon$ 模型计算的总压损失系数分布则与实验结果差异较大. 对 V2F 模型, 通道涡中心在吸力侧下游向上爬升至 29% 叶高处, 与实验结果 (27% 叶高, 图 6(b)) 接近. 计算结果还表明, 通道涡向下游发展形成范围较大的损失核心, 是叶栅二次损失的主要组成部分.

图 7 给出了端壁静压损失系数分布. 端壁静压梯度直接影响剪切力分布, 从而决定了气动损失大小. 由图可以看出, 在端壁绝大部分区域, V2F 模型模拟结果与实验结果相当吻合, 只是在叶片尾缘下游略有差异; 而 SST $k-\omega$ 模型过于估计了端壁区流体的剪切作用, 端壁静压分布与实验结果存在较大差异. 由于 V2F 模型考虑了近壁湍流各向异性及非当地的压力-应变效应, 引入垂直于流线的速度脉动 $\overline{v^2}$ 这一湍流尺度来代表湍流输运中的阻尼, 尽管继续延用了线性涡黏假设, 但可以充分再现出相关的湍流平均量, 对端壁静压分布有良好的预测能力.

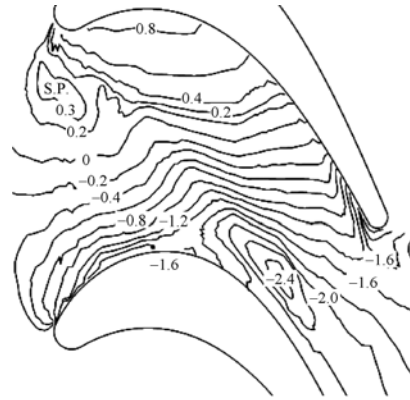
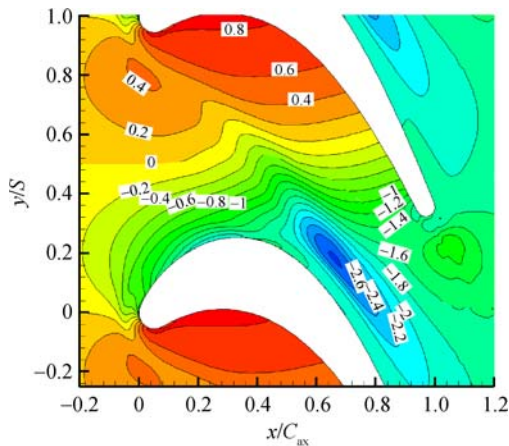
(c) 实验结果^[14]

图 7 端壁静压损失系数分布

Fig. 7 Endwall static pressure loss coefficient distribution

2.3 端区二次涡结构的形成与发展

图 8 为涡轮叶栅端壁区三维流线, 图中显示了马蹄涡(horseshoe vortex, HV)和通道涡(passage vortex, PV)发展过程, 图中 PS 及 SS 分别表示叶片压力侧及吸力侧. 来流边界层遇叶片前缘发生分离, 形成马蹄涡. 由于压力面与吸力面之间存在压力梯度, 马蹄涡压力面分支(HV-PS)在涡轮叶栅通道中受到该压力梯度的作用而向相邻叶片吸力侧发展并爬升形成通道涡. 马蹄涡与通道涡是涡轮叶栅通道中最主要的二次流结构.



(a) V2F模型仿真结果

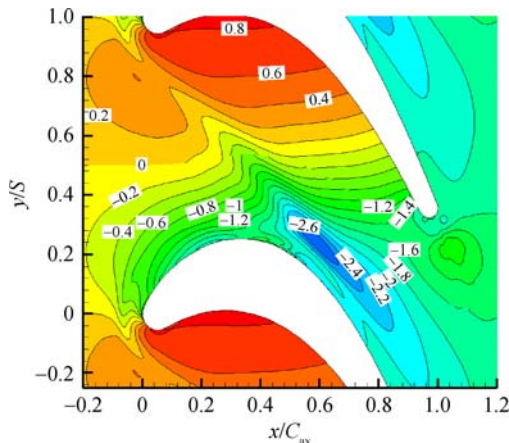
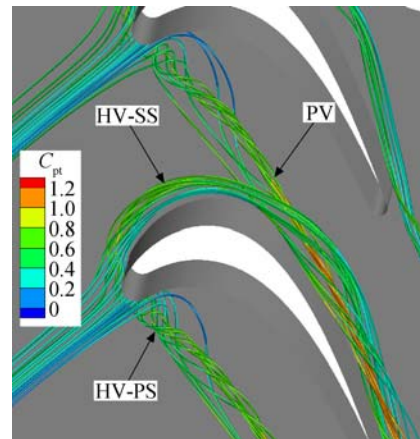
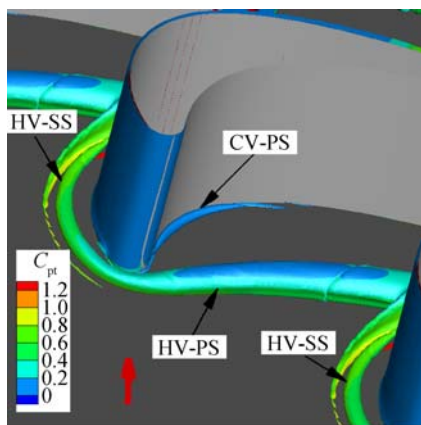
(b) SST $k-\omega$ 模型仿真结果

图 8 涡轮叶栅端壁三维流线

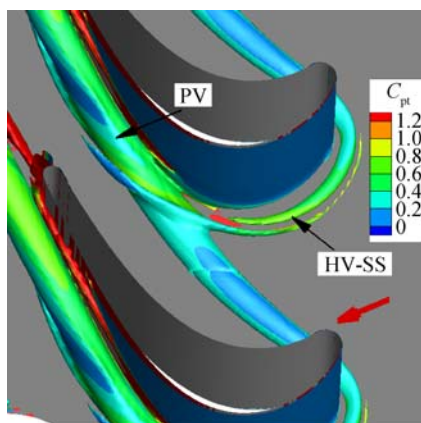
Fig. 8 Three-dimensional streamlines in turbine cascade endwall

通过叶栅流场中的主要涡核(Q 准则: 速度梯度张量的第二不变量)及端壁极限流线(图 9 和图 10)来说明叶栅主要二次涡系的形成与发展过程. 其中图 9 中较粗的箭头表示流动方向. 在叶片前缘主要存在马蹄涡结构、前缘角涡(corner vortex, CV). 前缘角涡在压力侧一直延伸至叶栅中

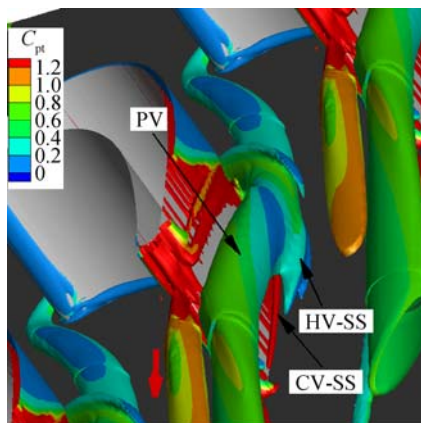
段. 在叶栅通道中, 马蹄涡压力面分支与相邻叶片马蹄涡吸力面分支相互作用, 并向相邻叶片吸力侧下游发展并爬升而形成通道涡. 从端壁极限流线可以看出, 来流边界层在前缘鞍点 (saddle point) 发生三维分离后形成向相邻叶片发展的两股分离线, 压力侧分离线受到横流作用向下游发展, 与相邻叶片吸力侧分离线交汇, 继续向下游运



(a) 前缘附近马蹄涡及角涡



(b) 马蹄涡与通道涡相互作用



(c) 通道涡下游发展及角涡

图9 叶栅流场中的主要涡核(Q准则)

Fig. 9 Vortex core in cascade flow field (Q-criterion)

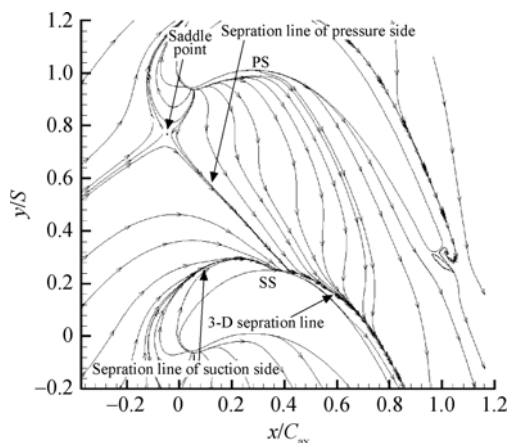


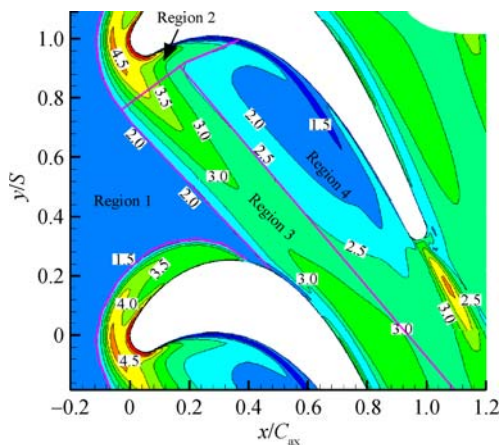
图10 端壁极限流线

Fig. 10 Endwall limiting streamlines

动发生三维分离, 在该三维分离线内形成了吸力侧角涡 (CV-SS), 但其强度明显低于马蹄涡及通道涡 (图 10).

2.4 涡轮端壁换热

在涡轮叶栅气动计算基础上, 对端壁施加恒热流密度为 3000 W/m^2 计算端壁换热. 图 11 为数值计算与实验结果斯坦顿数对比. 可以看出, V2F 模型对换热分布的预测与实验结果相吻合, 同时端壁换热呈现明显的分区特征. 根据端壁斯坦顿数分布, 可将端壁分为 4 个区域 (图 11(a)): 1 区为自由流区, 位于前缘马蹄涡分离线上游端壁 (region 1), 来流边界层未发生分离, 流体与壁面剪切力较小, 斯坦顿数较低 ($St < 2.0$); 2 区为前缘角区 (region 2), 来流边界层遇到叶片前缘发生三维分离形成马蹄涡系, 造成壁面附近流体剪切加强, 平均斯坦顿数最高 ($St > 3.5$); 3 区和 4 区 (region 3 和 region 4) 则由马蹄涡压力侧分离线与压力面型线两条线的中线分隔开, 其中 3 区由于受到通道涡的影响, 斯坦顿数高于 4 区. 图



(a) V2F模拟结果

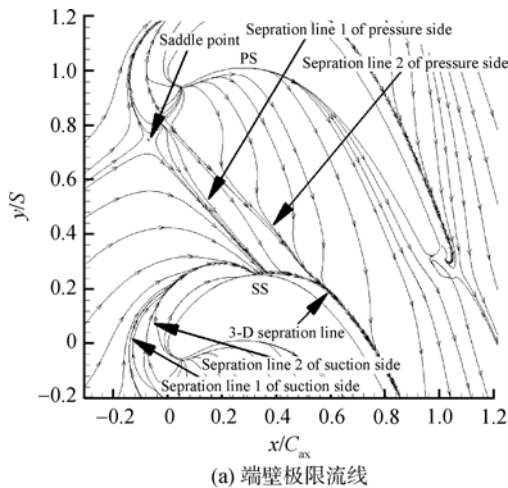


图 11 端壁斯坦顿数分布

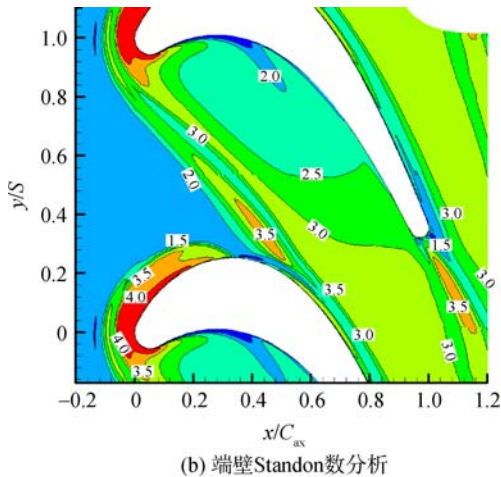
Fig. 11 Endwall Stanton number distribution

11 也表明,端壁换热分区线基本由涡轮叶栅流动三维分离模式及分离线位置决定. V2F 模型正确模拟了涡轮叶栅三维分离模式,对叶栅气动损失及端壁换热有良好预测能力.

图 12 给出了 SST $k-\omega$ 模型预测的端壁极限流线及端壁斯坦顿数分布. 由图可以看出, SST



(a) 端壁极限流线



(b) 端壁Stanton数分析

图 12 SST $k-\omega$ 模型模拟结果Fig. 12 Simulation results by SST $k-\omega$ model

$k-\omega$ 模型过于估计端壁附近流体对壁面的作用,来流边界层分离点(鞍点)较 V2F 模型结果提前(图 10),在分离点后流体再一次发生分离,形成两股马蹄涡分离线,即双马蹄涡结构. 该三维分离模式与 V2F 模型模拟及实验结果相比有本质区别,马蹄涡压力侧分离线处静压等值线与 V2F 模型及实验结果(图 7)相比更陡,端壁换热分布则存在与马蹄涡压力侧分离线相对应的两条低斯坦顿数条带,与实验的单条低斯坦顿数条带结果存在较大差异(图 11).

3 结 论

通过对低展弦比涡轮叶栅端壁二次流动与换热开展 V2F 模拟,发现涡轮叶栅通道中存在马蹄涡、通道涡、压力侧角涡、吸力侧角涡等多种涡系结构. 与 SST $k-\omega$ 模型及 realizable $k-\epsilon$ 模型相比, V2F 模型考虑了近壁湍流各向异性及非当地的压力-应变效应,引入垂直于流线的速度脉动 $\overline{v'v'}$ 这一湍流尺度来代表湍流输运中的阻尼,正确模拟了涡轮叶栅三维分离模式,在叶栅气动损失、端壁静压损失系数分布及由各涡系强度及位置决定的端壁换热分区特征也与实验结果吻合,使得 V2F 模型在涡轮端壁区流动与换热分析中有良好的发展前景.

参考文献:

- [1] Langston L S, Nice M L, Hooper R M. Three-dimensional flow within a turbine cascade passage[J]. Journal of Engineering for Power, 1977, 99(1): 21-28.
- [2] Langston L S. Crossflows in a turbine cascade passage[J]. Journal of Engineering for Power, 1980, 102(4): 866-874.
- [3] Sieverding C H, van den Bosche P. The use of coloured smoke to visualize secondary flows in a turbine-blade cascade[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1983, 134: 85-89.
- [4] Wang H P, Olson S J, Goldstein R J, et al. Flow visualisation in a linear turbine cascade of high performance turbine blades[J]. Journal of Turbomachinery, 1997, 119(1): 1-8.
- [5] Ho Y H, Lakshminarayana B. Computational modelling of three-dimensional endwall flow through a turbine rotor cascade with strong secondary flows[J]. Journal of Turbomachinery, 1996, 118(2): 250-261.
- [6] Hermanson K S, Thole K A. Effect of nonuniform inlet conditions on endwall secondary flows[J]. Journal of Turbomachinery, 2002, 124(4): 623-631.
- [7] Ames F E, Barbot P A, Wang C. Effects of aeroderivative combustor turbulence on endwall heat transfer distributions acquired in a linear vane cascade[J]. Journal of Turbomachinery, 2003, 125(2): 210-220.

- [8] Stitzel S, Thole K A. Flowfield computations of combustor-turbine interactions relevant to a gas turbine engine [J]. *Journal of Turbomachinery*, 2004, 126(1): 122-129.
- [9] 侯伟涛, 乔渭阳, 罗华玲. 二次流动对气冷涡轮叶栅流场的影响[J]. *推进技术*, 2010, 31(4): 438-443.
HOU Weitao, QIAO Weiyang, LUO Hualing. Effect of the secondary flow on the film cooling turbine cascade [J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2010, 31(4): 438-443. (in Chinese)
- [10] 罗华玲, 乔渭阳, 许开富. 一种大负荷低压涡轮叶型的气动性能[J]. *航空动力学报*, 2009, 24(12): 2130-2138.
LUO Hualing, QIAO Weiyang, XU Kaifu. Aerodynamic performance of a highly-loaded low-pressure turbine profile [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2009, 24(12): 2130-2138. (in Chinese)
- [11] Hermanson K, Kern S, Picker G, et al. Predictions of external heat transfer for turbine vanes and blades with secondary flow fields [J]. *Journal of Turbomachinery*, 2003, 125(1): 107-113.
- [12] Becz S, Majewski M S, Langston L S. Leading edge modification effects on turbine cascade endwall loss [R]. ASME Paper GT2003-38898, 2003.
- [13] Becz S, Majewski M S, Langston L S. An experimental investigation of contoured leading edges for secondary flow loss reduction [R]. ASME Paper GT2004-53964, 2004.
- [14] Becz S. Secondary flow loss reduction in highly loaded turbines [D]. Connecticut, US: University of Connecticut, 2007.
- [15] Holley B M, Becz S, Langston L S. Measurement and calculation of turbine cascade endwall pressure and shear stress [J]. *Journal of Turbomachinery*, 2006, 128(2): 232-239.
- [16] Holley B M, Langston L S. Surface shear stress and pressure measurements in a turbine cascade [J]. *Journal of Turbomachinery*, 2009, 131(3): 031014. 1-031014. 8.
- [17] Holley B M. Surface measurements of flow in a plane turbine cascade [D]. Connecticut, US: University of Connecticut, 2008.
- [18] Durbin P A. Separated flow computations with the $k-\epsilon-v^2$ model [J]. *AIAA Journal*, 1995, 33(4): 659-664.
- [19] Parneix S, Durbin P A, Behnia M. Computation of 3-D turbulent boundary layers using the V2F model [J]. *Flow, Turbulence and Combustion*, 1998, 60(1): 19-46.
- [20] Lien F S, Kalitzin G. Computations of transonic flow with the v^2-f turbulence model [J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2001, 22(1): 53-61.

(编辑: 陈 越)